

Sur la stabilisation de systèmes min-max-plus incertains

MSR'2013

Mehdi Lhommeau*

En collaboration avec L. Hardouin*, R. Santos Mendes †

*Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés - Angers - France

† DCA/FEEC/UNICAMP - Brazil

jeudi 14 novembre 2013

Les fonctions min-max-plus - 1/2

Définition - Fonction de type $(n, 1)$

Une fonction min – max-plus de type $(n, 1)$ est une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui peut être écrite comme un mot dans la grammaire suivante :

$$f := x_1, x_2, \dots, x_n | f + a | f \wedge f | f \vee f. \quad (1)$$

- où $\wedge = \min$ et $\vee = \max$.

Les fonctions min-max-plus - 1/2

Définition - Fonction de type $(n, 1)$

Une fonction min – max-plus de type $(n, 1)$ est une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui peut être écrite comme un mot dans la grammaire suivante :

$$f := x_1, x_2, \dots, x_n | f + a | f \wedge f | f \vee f. \quad (1)$$

- où $\wedge = \min$ et $\vee = \max$.

Exemples

- $5 + x_1 \vee 2 + x_2$ et $(2 + x_1 \vee x_2 + 1) \wedge 3 + x_3$ sont des fonctions min – max-plus
- $(x_1 + x_2) \wedge x_3$ et $x_1 \vee 1$ ne sont pas des expressions possibles avec la grammaire min – max.

Les fonctions min-max-plus - 2/2

Définition - Fonction de type (n, m)

Une fonction min – max-plus de type (n, m) est toute fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telle que chaque composante F_i est une fonction min – max-plus de type $(n, 1)$.

Les fonctions min-max-plus - 2/2

Définition - Fonction de type (n, m)

Une fonction min – max-plus de type (n, m) est toute fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telle que chaque composante F_i est une fonction min – max-plus de type $(n, 1)$.

Exemples

Soit $F = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction de type $(2, 2)$ où

$$F_1(x_1, x_2) = (x_1 - 2 \vee x_2 + 1) \wedge (x_1 - 3 \vee x_2 + 3)$$

$$F_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2 \wedge x_2 + 1) \vee (x_1 \wedge x_2 - 2)$$

ou

$$F_1(x_1, x_2) = \min(\max(x_1 - 2, x_2 + 1), \max(x_1 - 3, x_2 + 3))$$

$$F_2(x_1, x_2) = \max(\min(x_1 - 2, x_2 + 1), \min(x_1, x_2 - 2))$$

Propriétés des fonctions min-max-plus - 1/2

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction min-max-plus :

Monotonie (M)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

Propriétés des fonctions min-max-plus - 1/2

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction min-max-plus :

Monotonie (M)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

Additivement Homogène (AH)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R},$$

$$F(x_1 + h, \dots, x_n + h) = (F_1(x) + h, \dots, F_n(x) + h)$$

Propriétés des fonctions min-max-plus - 1/2

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction min-max-plus :

Monotonie (M)

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

Additivement Homogène (AH)

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall h \in \mathbb{R},$$

$$F(x_1 + h, \dots, x_n + h) = (F_1(x) + h, \dots, F_n(x) + h)$$

- (M) + (AH) \Rightarrow Fonctions Topicales
 - si on retarde les dates d'entrée, alors les dates de sortie sont également retardées ;
 - si on retarde les dates d'entrée d'une même durée h , alors les dates de sortie sont également retardées de h .

Contractantes pour la norme sup

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \|x - y\|_\infty$$

Propriétés des fonctions min-max-plus - 2/2

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction min-max-plus :

Vecteur temps de cycle : $\chi(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(x)/k$.

Propriétés des fonctions min-max-plus - 2/2

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction min-max-plus :

Vecteur temps de cycle : $\chi(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} F^k(x)/k$.

Remarques [Gaubert, Gunawardena, ...]

- si $\chi(F)$ existe, il ne dépend pas du point x .
- La limite n'existe pas toujours...
 - Toute application (M+AH) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ admet un vecteur temps de cycle
 - On peut construire une infinité d'applications (M+AH) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'ont pas de temps de cycle...
- x est un vecteur de date d'occurrences d'évènements \Rightarrow
Asymptotiquement, le temps de cycle peut être considéré comme le vecteur des durées moyennes entre chaque occurrence des évènements.

Algèbre $(\max, +)$ - semi-anneau idempotent

Le symbole \mathbb{R}_{\max} désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des deux opérations binaires \max et $+$ notées \vee (idempotent $\forall a \in \mathbb{R}_{\max}, a \vee a = a$) et $+$ respectivement. On a $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$.

Algèbre $(\max, +)$ - semi-anneau idempotent

Le symbole \mathbb{R}_{\max} désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des deux opérations binaires \max et $+$ notées \vee (idempotent $\forall a \in \mathbb{R}_{\max}, a \vee a = a$) et $+$ respectivement. On a $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$.

Intervalle $(\max, +)$

Un intervalle (fermé) $[x]$ de \mathbb{R}_{\max} est un sous-ensemble de \mathbb{R}_{\max} de la forme $[x] = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R}_{\max} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$.

Algèbre $(\max, +)$ - semi-anneau idempotent

Le symbole \mathbb{R}_{\max} désigne l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ muni des deux opérations binaires \max et $+$ notées \vee (idempotent $\forall a \in \mathbb{R}_{\max}, a \vee a = a$) et $+$ respectivement. On a $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$.

Intervalle $(\max, +)$

Un intervalle (fermé) $[x]$ de \mathbb{R}_{\max} est un sous-ensemble de \mathbb{R}_{\max} de la forme $[x] = [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R}_{\max} \mid \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$.

- $\mathbb{I}\mathbb{R}_{\max}$ ensemble des intervalles de \mathbb{R}_{\max} :

$$\{[x] = [\underline{x}, \bar{x}] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \varepsilon \leq \underline{x} \leq \bar{x}\} \cup \{[\varepsilon]\},$$

avec $[\varepsilon] = [\varepsilon, \varepsilon]$.

- Les opérations \max (notée \vee) et $+$ seront étendues aux intervalles de $\mathbb{I}\mathbb{R}_{\max}$:

$$[\underline{x}, \bar{x}] \vee [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} \vee \underline{y}, \bar{x} \vee \bar{y}] \text{ et } [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}].$$

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 1/4

Calcul matriciel $(\max, +)$

Soit $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, avec $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, on pose
 $A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij})_{ij}$ et $A + B = \left(\bigvee_{k=1}^n a_{ik} + b_{kj} \right)_{ij}$.

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 1/4

Calcul matriciel $(\max, +)$

Soit $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, avec $A = (a_{ij})_{ij}$, $B = (b_{ij})_{ij}$, on pose $A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij})_{ij}$ et $A + B = \left(\bigvee_{k=1}^n a_{ik} + b_{kj} \right)_{ij}$.

Calcul matriciel dans \mathbb{IR}_{\max}

- Soient $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$, $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]_{i,j=1}^n$ et $\underline{A} = [\underline{a}_{ij}]_{i,j=1}^n$ des matrices réelles $n \times n$ (avec $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$ où $\underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n$).
- On définit une matrice intervalle A^I par $A^I = [\underline{A}, \bar{A}] = \{A | \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\} = \{[a_{ij}] | \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n\}$.

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 2/4

Beaucoup de résultats en algèbre $(\max, +)$ ont une interprétation sur les graphes.

Graphe $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

- L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ est $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes (ou colonnes) de A

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 2/4

Beaucoup de résultats en algèbre $(\max, +)$ ont une interprétation sur les graphes.

Grphe $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

- L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ est $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes (ou colonnes) de A
- L'ensemble des arcs de $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble des couples ordonnés (i, j) correspondant aux termes $a_{ij} \in A$ ($a_{ij} \neq \varepsilon$).

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 2/4

Beaucoup de résultats en algèbre $(\max, +)$ ont une interprétation sur les graphes.

Grphe $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

- L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ est $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes (ou colonnes) de A
- L'ensemble des arcs de $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble des couples ordonnés (i, j) correspondant aux termes $a_{ij} \in A$ ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- C'est un graphe valué, à chaque arc (i, j) se trouve associée la valeur a_{ij} ($a_{ij} \neq \varepsilon$).

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 2/4

Beaucoup de résultats en algèbre $(\max, +)$ ont une interprétation sur les graphes.

Grphe $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

- L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ est $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes (ou colonnes) de A
- L'ensemble des arcs de $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble des couples ordonnés (i, j) correspondant aux termes $a_{ij} \in A$ ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- C'est un graphe valué, à chaque arc (i, j) se trouve associée la valeur a_{ij} ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- Soit $A^I \in \mathbb{I}\mathbb{R}_{\max}^{n \times n} \Rightarrow$ deux graphes $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(\overline{A})$.

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 2/4

Beaucoup de résultats en algèbre $(\max, +)$ ont une interprétation sur les graphes.

Graphe $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

- L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ est $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes (ou colonnes) de A
- L'ensemble des arcs de $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble des couples ordonnés (i, j) correspondant aux termes $a_{ij} \in A$ ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- C'est un graphe valué, à chaque arc (i, j) se trouve associée la valeur a_{ij} ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- Soit $A^I \in \mathbb{I}\mathbb{R}_{\max}^{n \times n} \Rightarrow$ deux graphes $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(\overline{A})$.
- La longueur d'un chemin c , notée $l(c)$, est le nombre d'arcs qui le constituent.

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 2/4

Beaucoup de résultats en algèbre $(\max, +)$ ont une interprétation sur les graphes.

Graphe $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$

- L'ensemble des sommets de $\mathcal{G}(A)$ est $\{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des lignes (ou colonnes) de A
- L'ensemble des arcs de $\mathcal{G}(A)$ est l'ensemble des couples ordonnés (i, j) correspondant aux termes $a_{ij} \in A$ ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- C'est un graphe valué, à chaque arc (i, j) se trouve associée la valeur a_{ij} ($a_{ij} \neq \varepsilon$).
- Soit $A^I \in \mathbb{I}\mathbb{R}_{\max}^{n \times n} \Rightarrow$ deux graphes $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(\overline{A})$.
- La longueur d'un chemin c , notée $l(c)$, est le nombre d'arcs qui le constituent.
- Le poids d'un chemin, noté $w(c)$, est la somme des valuations des arcs qui le constituent.

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 3/4

Exemple

Soit la matrice $A^T = \begin{pmatrix} [1, 2] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [10, 10] & [\varepsilon, \varepsilon] & [6, 8] \\ [1, 3] & [1, 4] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix}$.

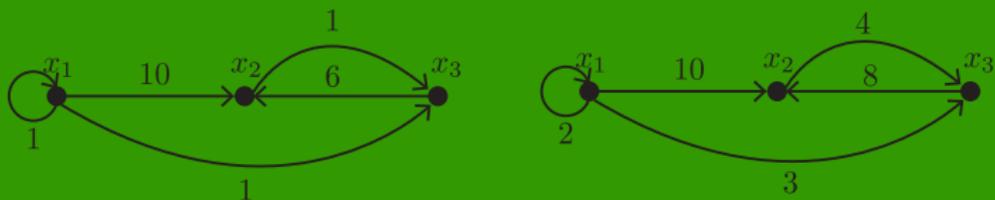


Figure : $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(\bar{A})$

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 4/4

Soit $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$.

- Soit $\mu(A) = [\mu_1(A) \dots \mu_n(A)]$ un vecteur tel que

$$\mu_i(A) = \max \frac{\text{poids du circuit en amont de } i}{\text{longueur du circuit en amont de } i}$$

- A est irréductible si $\mathcal{G}(A)$, le graphe de A , est fortement connexe.

⇒ unique valeur propre égale au poids moyen maximum des circuits du graphe;

⇒ Si F est une fonction max-seulement et $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ sa matrice associée alors $\chi(F) = \mu(A)$.

Sur les matrices dans $(\max, +)$ - 4/4

Soit $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$.

- Soit $\mu(A) = [\mu_1(A) \dots \mu_n(A)]$ un vecteur tel que

$$\mu_i(A) = \max \frac{\text{poids du circuit en amont de } i}{\text{longueur du circuit en amont de } i}$$

- A est irréductible si $\mathcal{G}(A)$, le graphe de A , est fortement connexe.

⇒ unique valeur propre égale au poids moyen maximum des circuits du graphe;

⇒ Si F est une fonction max-seulement et $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ sa matrice associée alors $\chi(F) = \mu(A)$.

Exemple

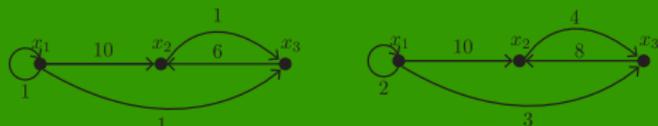


Figure : $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(\bar{A})$

- $\mu(A) = \begin{pmatrix} 1 & 3.5 & 3.5 \end{pmatrix}$
- $\mu(\bar{A}) = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \end{pmatrix}$
- (Arc $x_2 \rightarrow x_1$) :
- $\mu(A) = \begin{pmatrix} 5.5 & 5.5 & 5.5 \end{pmatrix}$
- $\mu(\bar{A}) = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$

Les systèmes dynamiques min-max-plus incertains

Système min-max-plus incertain

On note F^I une fonction min-max-plus incertaine :

- Les paramètres $a_{in}^{\alpha_i}$ des fonctions $f_i^{\alpha_i}(\mathbf{x})$ appartiennent à \mathbb{IR}_{\max} .
- Un système dynamique incertain est donné par

$$x(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \quad k = 0, 1, \dots$$

Les systèmes dynamiques min-max-plus incertains

Système min-max-plus incertain

On note F^I une fonction min-max-plus incertaine :

- Les paramètres $a_{in}^{\alpha_i}$ des fonctions $f_i^{\alpha_i}(\mathbf{x})$ appartiennent à \mathbb{IR}_{\max} .
- Un système dynamique incertain est donné par

$$x(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \quad k = 0, 1, \dots$$

Exemple

$$F_1^I(x_1, x_2) = ([1, 4] + x_1 \vee [2, 2] + x_2) \wedge [4, 10] + x_1$$

$$F_2^I(x_1, x_2) = ([\varepsilon, 2] + x_1 \wedge [2, 3] + x_2)$$

Forme normale conjonctive - 1/3

- Les fonctions min – max-plus incertaines admettent une max-**représentation** incertaine :

$$F^I(\mathbf{x}) = \bigwedge A_i^I \mathbf{x}$$

- où $A_i^I \in \mathbb{IR}_{\max}^{n \times n}$.

Forme normale conjonctive - 1/3

- Les fonctions min – max-plus incertaines admettent une max-représentation incertaine :

$$F^I(\mathbf{x}) = \bigwedge A_i^I \mathbf{x}$$

- où $A_i^I \in \mathbb{IR}_{\max}^{n \times n}$.

Exemple

$$\begin{aligned} F^I &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ([1, 4] + x_1 \vee [2, 2] + x_2) \wedge [4, 10] + x_1 \\ ([\varepsilon, 2] + x_1 \wedge [2, 3] + x_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} [1, 4] & [2, 2] \\ [\varepsilon, 2] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} [1, 4] & [2, 2] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [2, 3] \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} [4, 10] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, 2] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \wedge \\ &\quad \begin{pmatrix} [4, 10] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [2, 3] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Forme normale conjonctive - 2/3

Theorème de dualité

Soit F^I une fonction min-max-plus incertaine de type (n, n) . Si le vecteur de temps de cycle de F^I existe alors

$$\chi(F^I) = [\wedge \mu(\underline{A}_i^I), \wedge \mu(\overline{A}_i^I)].$$

Forme normale conjonctive - 2/3

Theorème de dualité

Soit F^I une fonction min-max-plus incertaine de type (n, n) . Si le vecteur de temps de cycle de F^I existe alors

$$\chi(F^I) = [\wedge \mu(\underline{A}_i), \wedge \mu(\overline{A}_i)].$$

Lemme

- Soit $F^I(\mathbf{x}(k)) = \wedge A_i^I \mathbf{x}(k)$ une fonction min-max-plus incertaine sous forme normale conjonctive:
 - Si tous les graphes $\mathcal{G}(\underline{A}_i)$ sont fortement connexe on a

$$\forall A \in A_i^I, \chi_i(A) = \chi_j(A), 1 \leq i, j \leq n,$$

où $\chi(A) = [\chi_1(A) \dots \chi_n(A)]$.

Forme normale conjonctive - 3/3

Exemple

Soit

$$\begin{aligned} F^I &= \left(\begin{array}{l} (([x_2] + [3, 4]) \vee ([x_3] + [2, 4])) \wedge ([x_1] + [1, 1]) \\ [x_2] \wedge ([x_3] + [2, 5]) \\ ([x_1] + [1, 1]) \vee ([x_2] + [2, 8]) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{ccc} [\varepsilon, \varepsilon] & [3, 4] & [2, 4] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [0, 0] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [1, 1] & [2, 8] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{ccc} [1, 1] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [0, 0] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [1, 1] & [2, 8] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{array} \right) \wedge \\ &\quad \left(\begin{array}{ccc} [\varepsilon, \varepsilon] & [3, 4] & [2, 4] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [2, 5] \\ [1, 1] & [2, 8] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{array} \right) \wedge \left(\begin{array}{ccc} [1, 1] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [2, 5] \\ [1, 1] & [2, 8] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\chi(A_1^I) = \begin{pmatrix} [1.5, 2.5] \\ [0, 0] \\ [1.5, 2.5] \end{pmatrix}, \chi(A_2^I) = \begin{pmatrix} [1, 1] \\ [0, 0] \\ [1, 1] \end{pmatrix}, \chi(A_3^I) = \begin{pmatrix} [2, 6.5] \\ [2, 6.5] \\ [2, 6.5] \end{pmatrix}, \chi(A_4^I) = \begin{pmatrix} [1, 1] \\ [3, 6.5] \\ [2, 6.5] \end{pmatrix}$$

$$\text{soit } \chi(F^I) = \begin{pmatrix} [1, 1] \\ [0, 0] \\ [1, 1] \end{pmatrix}. \text{ On a } \forall F, \underline{F} \leq F \leq \overline{F}, \chi(F) \in \chi(F^I).$$

Stabilisation de système min-max-plus

Soit le système dynamique MMP en boucle ouverte :

$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(\mathbf{u}(k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

avec

- $F^I(\mathbf{x})$ est une fonction min-max-plus incertaine de type (n, n) ;
- $G^I(\mathbf{u})$ une fonction incertaine de type (p, n) ;
- $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \dots x_n(k)]^\tau \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathbf{u}(k) = [u_1(k) \dots u_p(k)] \in \mathbb{R}^p$ le vecteur d'entrée, $\mathbf{u}(0) \in \mathbb{R}^p$.

Stabilisation de système min-max-plus

Soit le système dynamique MMP en boucle ouverte :

$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(\mathbf{u}(k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

avec

- $F^I(\mathbf{x})$ est une fonction min-max-plus incertaine de type (n, n) ;
- $G^I(\mathbf{u})$ une fonction incertaine de type (p, n) ;
- $\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \dots x_n(k)]^\tau \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état, $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$;
- $\mathbf{u}(k) = [u_1(k) \dots u_p(k)] \in \mathbb{R}^p$ le vecteur d'entrée, $\mathbf{u}(0) \in \mathbb{R}^p$.

max-projection incertaine d'un système MMP

$$\mathbf{x}(k+1) = \bigwedge \left(A_i^I \mathbf{x}(k) \vee B_j^I \mathbf{u}(k) \right) \quad k = 0, 1, \dots$$

- avec $A_i^I = [\underline{A}_i, \overline{A}_i]$ et $B_j^I = [\underline{B}_j, \overline{B}_j]$.

Stabilisation de système min-max-plus

Retour d'état

- On pose $\mathbf{u}(k) = K(\mathbf{x}(k))$, où K est une fonction MMP de type (n, p) .

Stabilisation de système min-max-plus

Retour d'état

- On pose $\mathbf{u}(k) = K(\mathbf{x}(k))$, où K est une fonction MMP de type (n, p) .
- Le système en boucle fermée, noté $\mathcal{N}^I(K)$, est donné par
$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))), \quad k = 0, 1, \dots$$

Stabilisation de système min-max-plus

Retour d'état

- On pose $\mathbf{u}(k) = K(\mathbf{x}(k))$, où K est une fonction MMP de type (n, p) .
- Le système en boucle fermée, noté $\mathcal{N}^I(K)$, est donné par
$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))), \quad k = 0, 1, \dots$$
- sous forme de projection max-seulement :

$$\mathbf{x}(k+1) = \bigwedge \left(A_i^I \mathbf{x}(k) \vee B_j^I K(\mathbf{x}(k)) \right) \quad k = 0, 1, \dots$$

Stabilisation de système min-max-plus

Retour d'état

- On pose $\mathbf{u}(k) = K(\mathbf{x}(k))$, où K est une fonction MMP de type (n, p) .
- Le système en boucle fermée, noté $\mathcal{N}^I(K)$, est donné par
$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))), \quad k = 0, 1, \dots$$
- sous forme de projection max-seulement :

$$\mathbf{x}(k+1) = \wedge \left(A_i^I \mathbf{x}(k) \vee B_j^I K(\mathbf{x}(k)) \right) \quad k = 0, 1, \dots$$

- Le vecteur de temps de cycle est donné par

$$\chi(\mathcal{N}^I(K)) = \chi \left(F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))) \right).$$

Stabilisation de système min-max-plus

Retour d'état

- On pose $\mathbf{u}(k) = K(\mathbf{x}(k))$, où K est une fonction MMP de type (n, p) .

- Le système en boucle fermée, noté $\mathcal{N}^I(K)$, est donné par

$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))), \quad k = 0, 1, \dots$$

- sous forme de projection max-seulement :

$$\mathbf{x}(k+1) = \wedge \left(A_i^I \mathbf{x}(k) \vee B_j^I K(\mathbf{x}(k)) \right) \quad k = 0, 1, \dots$$

- Le vecteur de temps de cycle est donné par

$$\chi(\mathcal{N}^I(K)) = \chi \left(F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))) \right).$$

- $\chi(\mathcal{N}^I(K))$ est une fonction monotone croissante continue en fonction de K ;

Stabilisation de système min-max-plus

Retour d'état

- On pose $\mathbf{u}(k) = K(\mathbf{x}(k))$, où K est une fonction MMP de type (n, p) .

- Le système en boucle fermée, noté $\mathcal{N}^I(K)$, est donné par

$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))), \quad k = 0, 1, \dots$$

- sous forme de projection max-seulement :

$$\mathbf{x}(k+1) = \wedge \left(A_i^I \mathbf{x}(k) \vee B_j^I K(\mathbf{x}(k)) \right) \quad k = 0, 1, \dots$$

- Le vecteur de temps de cycle est donné par

$$\chi(\mathcal{N}^I(K)) = \chi \left(F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))) \right).$$

- $\chi(\mathcal{N}^I(K))$ est une fonction monotone croissante continue en fonction de K ;
- $\chi_0 = \chi(\underline{F})$ est la borne inférieure de $\chi(\mathcal{N}^I(K))$.

Stabilisation de système min-max-plus

Définition

- Le système $\mathcal{N}^I(K)$ est stable s'il existe une fonction $K(\mathbf{x})$ telle que $\forall F \in F^I, \forall G \in G^I,$

$$\chi_i(F(\mathbf{x}(k)) \vee G(K(\mathbf{x}(k)))) = \chi_j(F(\mathbf{x}(k)) \vee G(K(\mathbf{x}(k)))) , \\ 1 \leq i, j \leq n.$$

⇒ Le système a un temps de cycle global.

Stabilisation de système min-max-plus

Définition

- Le système $\mathcal{N}^I(K)$ est stable s'il existe une fonction $K(\mathbf{x})$ telle que $\forall F \in F^I, \forall G \in G^I$,

$$\chi_i(F(\mathbf{x}(k)) \vee G(K(\mathbf{x}(k)))) = \chi_j(F(\mathbf{x}(k)) \vee G(K(\mathbf{x}(k)))) , \\ 1 \leq i, j \leq n.$$

⇒ Le système a un temps de cycle global.

Proposition

- Le système

$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(K(\mathbf{x}(k))), \quad k = 0, 1, \dots$$

est stabilisable s'il existe un correcteur $K(\mathbf{x})$ tel que les valeurs propres $\chi(\mathcal{N}^I(K)) \in [\chi_0, \infty[$, avec $\chi_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \chi_i(\underline{F})$.

Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Soit le système dynamique min-max-plus incertain :

$$\mathbf{x}(k+1) = F^I(\mathbf{x}(k)) \vee G^I(\mathbf{u}(k)), \quad k = 0, 1, \dots$$

- avec pour F^I ,

$$F_1^I(\mathbf{x}) = [1, 3] + x_1 \wedge [3, 5] + x_2$$

$$F_2^I(\mathbf{x}) = [1, 2] + x_3$$

$$F_3^I(\mathbf{x}) = [1, 1] + x_1 \vee [2, 5] + x_2 \vee [2, 3] + x_3$$

- et pour la fonction d'entrée $G^I(\mathbf{u})$,

$$G_1^I(\mathbf{u}) = [1, 2] + u_2$$

$$G_2^I(\mathbf{u}) = [1, 3] + u_1 \wedge [2, 2] + u_2$$

$$G_3^I(\mathbf{u}) = [\varepsilon, \varepsilon]$$

Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- La fonction $F^I(\mathbf{x})$ est décomposée en deux max-seulement projections :

$$A_1^I = \begin{pmatrix} [1, 3] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [1, 2] \\ [1, 1] & [2, 5] & [2, 3] \end{pmatrix}, A_2^I = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [3, 5] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] & [1, 2] \\ [1, 1] & [2, 5] & [2, 3] \end{pmatrix}.$$

- Pour la fonction G^I on obtient les projections max-seulement suivantes :

$$B_1^I = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [1, 2] \\ [1, 3] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix}, B_2^I = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [1, 2] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [2, 2] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix}.$$

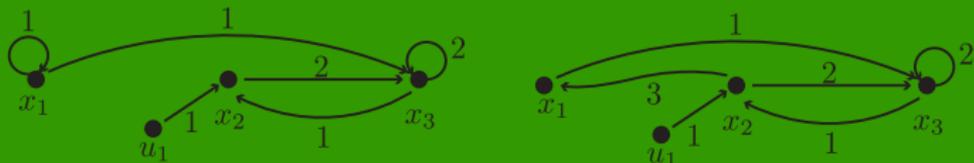
Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Le vecteur de temps de cycle est donné par

$$\begin{aligned}\chi(F^I) &= [\chi(\underline{A}_1) \wedge \chi(\underline{A}_2), \chi(\overline{A}_1) \wedge \chi(\overline{A}_2)] \\ &= \begin{pmatrix} [1, 3] \\ [2, 3.5] \\ [2, 3.5] \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Les graphes $\mathcal{G}(\underline{A}_1)$ et $\mathcal{G}(\underline{A}_2)$



Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Pour que le système, en boucle ouverte, soit stable il faut que le temps de cycle vérifie

$$\chi_i(\underline{F}) = \chi_j(\underline{F}) \text{ et } \chi_i(\overline{F}) = \chi_j(\overline{F}), 1 \leq i, j \leq n.$$

⇒ Le système, en boucle ouverte, n'est pas stable car
 $\chi(\underline{F}) = [1 \ 2 \ 2]$ et $\chi(\overline{F}) = [3 \ 3.5 \ 3.5]$.

Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Pour que le système, en boucle ouverte, soit stable il faut que le temps de cycle vérifie

$$\chi_i(\underline{F}) = \chi_j(\underline{F}) \text{ et } \chi_i(\overline{F}) = \chi_j(\overline{F}), 1 \leq i, j \leq n.$$

⇒ Le système, en boucle ouverte, n'est pas stable car

$$\chi(\underline{F}) = [1 \ 2 \ 2] \text{ et } \chi(\overline{F}) = [3 \ 3.5 \ 3.5].$$

- **Objectif** : Trouver un correcteur $u(k) = K(\mathbf{x}(k))$ tel que le temps de cycle $\chi(N(K(\mathbf{x})))$ soit global.

Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Pour que le système, en boucle ouverte, soit stable il faut que le temps de cycle vérifie

$$\chi_i(\underline{F}) = \chi_j(\underline{F}) \text{ et } \chi_i(\overline{F}) = \chi_j(\overline{F}), 1 \leq i, j \leq n.$$

⇒ Le système, en boucle ouverte, n'est pas stable car

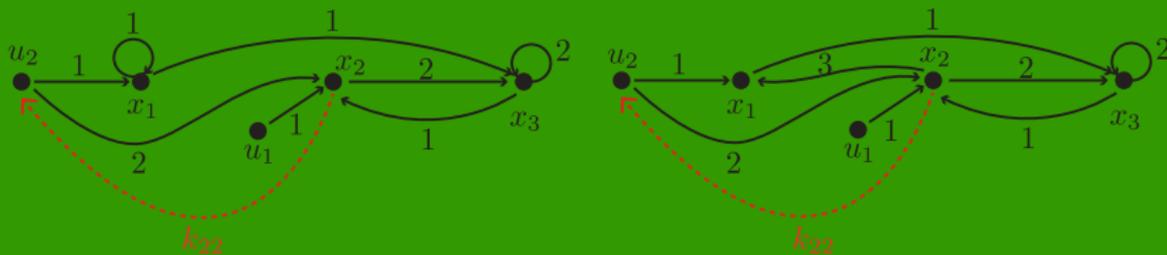
$$\chi(\underline{F}) = [1 \ 2 \ 2] \text{ et } \chi(\overline{F}) = [3 \ 3.5 \ 3.5].$$

- **Objectif** : Trouver un correcteur $u(k) = K(\mathbf{x}(k))$ tel que le temps de cycle $\chi(N(K(\mathbf{x})))$ soit global.
 - Borne inférieure du temps de cycle $\chi_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \chi_i(\underline{F}) = 2.$
- ⇒ On ne veut pas dégrader les performances du système, i.e., que l'on cherche un correcteur K tel que $\chi(\underline{F}) = [2 \ 2 \ 2].$

Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Il faut rendre les graphes $\mathcal{G}(\underline{A}_i)$ fortement connexes :

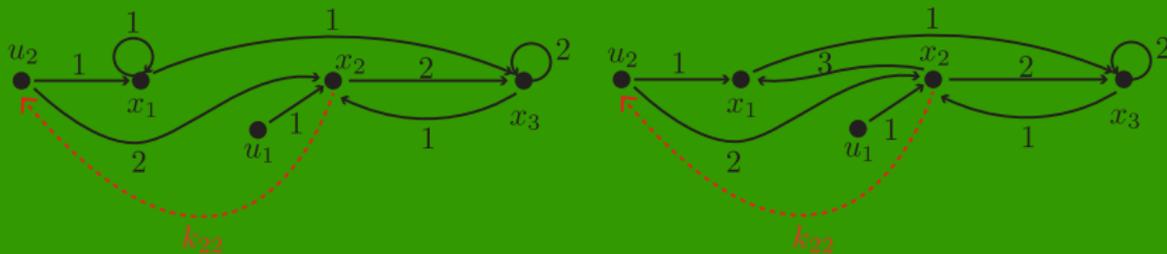


- Soit le correcteur $K = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & k_{22} & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Stabilisation de système min-max-plus

Exemple d'application

- Il faut rendre les graphes $\mathcal{G}(\underline{A}_i)$ fortement connexes :



- Soit le correcteur $K = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & k_{22} & \varepsilon \end{pmatrix}$.
- Soit $k_{22} = 1$, on a $\chi(\underline{F}) = [2 \ 2 \ 2]$ et $\chi(\overline{F}) = [3.5 \ 3.5 \ 3.5]$, c'est-à-dire que $\forall F \in F^I, \forall G \in G^I, \chi(\mathcal{N}(K)) \in [2, 3.5]$.

Conclusion

- Nous avons introduit une extension incertaines des systèmes min-max-plus.

Conclusion

- Nous avons introduit une extension incertaines des systèmes min-max-plus.
 - Cette nouvelle classe de modèles permet de représenter des systèmes où les paramètres ne sont pas connus avec certitude.

Conclusion

- Nous avons introduit une extension incertaines des systèmes min-max-plus.
 - Cette nouvelle classe de modèles permet de représenter des systèmes où les paramètres ne sont pas connus avec certitude.
 - On peut également décomposer un système min-max-plus incertain en projection max-seulement (duallement min-seulement).

Conclusion

- Nous avons introduit une extension incertaines des systèmes min-max-plus.
 - Cette nouvelle classe de modèles permet de représenter des systèmes où les paramètres ne sont pas connus avec certitude.
 - On peut également décomposer un système min-max-plus incertain en projection max-seulement (duallement min-seulement).
 - Il est possible de trouver un correcteur de type retour d'état qui rend le système stable.