Thème :

Combinaison des méthodes de stabilité forte et d'estimation non paramétrique pour l'approximation du système d'attente $G/G/1$ par le système $M/G/1$

Dr. Aicha BARECHE
email : aicha_bareche@yahoo.fr

Laboratoire de Modélisation et d'Optimisation des Systèmes (LAMOS)
Université A/Mira de Béjaia, Algérie

Plan de l'exposé

1. **Introduction**
2. **Stabilité forte du système d'attente $M/G/1$**
   - Concept de stabilité forte
   - Perturbation du flot des arrivées
3. **Estimation non paramétrique de la densité de probabilité**
   - Méthode du noyau
   - Effets de bord
4. **Application des méthodes d'estimation non paramétrique pour approcher le système $G/G/1$ par le sytème $M/G/1$**
   - Simulation - Application numérique
5. **Conclusion**

Introduction

- Dans la pratique : Système réel souvent compliqué.
- Le remplacer par un système idéal plus simple.
- Apparition du problème de stabilité.
- **Exemple :**
  - Modèle $G/G/1$ très difficile à analyser (simples résultats analytiques obtenus pour des cas spéciaux).
  - Pour $G/G/1$, les formules exactes pour déterminer les mesures de performance sont inconnues.
  - Si on suppose que $G/G/1$ est proche de $M/G/1$, on peut utiliser les formules de $M/G/1$ pour approcher les caractéristiques de $G/G/1$.

Système stable :

- Petite perturbation de paramètres $\Rightarrow$ petite perturbation de caractéristiques.
- Ecart entre les caractéristiques en fonction de l'écart entre les paramètres.

Méthode de stabilité forte [Aïssani-Kartashov 1983, Kartashov 1996]

- Applicable à tout modèle de recherche opérationnelle représenté par une chaîne de Markov homogène .
- Analyse qualitative et quantitative.
- Petite perturbation des paramètres par rapport à une certaine norme.
- Inégalités de stabilité avec calcul exact de constantes.

- Applicabilité aux SFA prouvée dès 1982 [Aïssani 1982].

1. **Perturbation de différents paramètres :**
    - Flot des arrivées [Aïssani-Kartashov 1984].
    - Structure du système [Aïssani 1992, Mecheri 2005].
    - Intensité de service [Aïssani 1990].
2. **Différentes classes de systèmes de files d'attente :**
    - Systèmes non fiables [Abbas-Aïssani (2007, 2010)].
    - Systèmes prioritaires [Bouallouche-Aïssani 2008, Hamadouche-Aïssani 2011].
    - Systèmes avec rappels [Berdjoudj-Aïssani (2004, 2005)].
    - Systèmes avec vacances [Rahmoune-Aïssani 2008].
    - Modèles de stock [Mouhoubi-Aïssani 2007, Rabta-Aïssani (2004, 2005)].
    - Modèles de risque [Benouaret-Aïssani 2010].
    - Réseaux de files d'attente [Lekadir-Aïssani (2008, 2011)].

Introduction

Objet :

- Prouver l'applicabilité de la méthode de stabilité forte à l'étude de systèmes de files d'attente classiques lorsqu'une loi est générale et inconnue [Bareche-Aïssani (2007, 2008, 2011)].
- Méthodes d'estimation non paramétrique pour estimer la fonction densité inconnue de la distribution considérée [Rosenblatt 1956, Parzen 1962, Schuster 1985, Chen 2000, Bouezmarni-Scaillet 2005].
- Dans la pratique, la plupart des lois dans les systèmes d'attente sont définies sur un support borné (à gauche), d'où l'intérêt de correction des effets de bord [Schuster 1985, Chen 2000, Bouezmerni-Scaillet 2005].

Définition

Une chaîne de Markov X, d'opérateur de transition P et de mesure invariante π, est dite fortement stable par rapport à la norme $\|.\|_v$,

$$\|\nu\|_v = \int_{x\in E} v(x)|\nu|(dx), \quad (1)$$

si $\|P\|_v < \infty$ et chaque noyau stochastique $\mathbf{Q}$ dans $\{\mathbf{Q} : \|\mathbf{Q}-\mathbf{P}\|_v < \epsilon\}$ admet une mesure invariante unique μ :

$$\|\mu-\pi\|_v \to 0 \ \textit{quand} \ \|\mathbf{Q}-\mathbf{P}\|_v \to 0 \quad (2)$$

Critère de stabilité forte

Théorème (Kartashov 1996)

Une chaîne de Markov X, d'opérateur de transition P et de mesure invariante π, est fortement v-stable, si et seulement si il existe une mesure α et une fonction mesurable non négative h sur E :

1. $\|P\|_v < \infty$;
2. $\pi h > 0$, $\alpha 1\!\!1 = 1\!\!1$, $\alpha h > 0$;
3. $T = \mathbf{P} - h \circ \alpha > 0$;
4. $\exists\, m \geq 1$ et $\rho < 1$: $T^m v(x) \leq \rho\, v(x), \forall x \in E$.

Si de plus, $\| \triangle \|_v = \|Q - P\|_v < \frac{(1-\rho)}{c}$, *on a :*

$$\|\mu - \pi\|_v \leq \| \triangle \|_v\; c\; \|\pi\|_v\; (1 - \rho - c\, \| \triangle \|_v)^{-1}, \qquad (3)$$

où $c = m\; \|P\|_v^{m-1}\; (1 + \|1\!\!1\|_v\; \|\pi\|_v),\quad \|\pi\|_v \leq (\alpha v)(1-\rho)^{-1}(\pi h)m\; \|P\|_v^{m-1}$.

Approximation du système $G/G/1$ par le système $M/G/1$

a] Description des modèles $G/G/1$ et $M/G/1$

- Soit à approximer le modèle réel $G/G/1$ par le modèle idéal $M/G/1$.
  - Même loi de service générale (H) dans les systèmes $G/G/1$ et $M/G/1$.
  - Loi des inter-arrivées générale (G) dans le système $G/G/1$.
  - Loi des inter-arrivées (E_λ) dans le système $M/G/1$.
- La proximité des deux systèmes est caractérisée par :

$$w^* = w^*(G, E_\lambda) = \int \varphi^*(t)|G - E_\lambda|(dt), \qquad (4)$$

où φ^* est une fonction poids.

Approximation du système $G/G/1$ par le système $M/G/1$

b] Estimation de la stabilité forte

Théorème (Aïssani 1987)

Si a) $\lambda\,\mathbb{E}(\xi) < 1$, *b)* $\exists a > 0 : \ \mathbb{E}(e^{a\xi}) = \int e^{au} dH(u) < \infty$, *(dans $M/G/1$), et si c)* $E^* = \int \varphi^*(t) E_\lambda(dt) < \infty$. *Alors,* $\forall\ \beta : 1 < \beta < \beta_0$, $\overline{X}_n$ *est fortement* $v-$*stable pour :* $v(n,t) = \beta^n[\exp(-\alpha t) + c^{-1}\varphi^*(t)]$, *où,*

$\beta_0 = \sup(\beta : H^*(\lambda - \lambda\beta) < \beta)$, $\ c = \frac{\beta E^*}{1-\rho}$, $\ \rho = \frac{H^*(\lambda-\lambda\beta)+\beta}{2\beta} < 1$. *Si de plus,*

$$\begin{cases} w^*(G, E_\lambda) \leq \frac{1-\rho}{2c_0(1+c)}(1+\beta+c_1)^{-1}, \\ w_0 = w_0(G, E_\lambda) = \int |G - E_\lambda|(dt) \leq \frac{(\beta_0-\beta)}{\beta_0^2}. \end{cases}$$

$$Er = \|\pi - \overline{\pi}\|_v \leq 2[(1+\beta)w^* + c_1 w_0]c_0 c_2(1+c), \qquad (5)$$

où, $c_0' \leq c_0 : \ c_0' = 1 + \frac{(1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)E^*}{2(1-\rho)^2}$, $\ m = \mathbb{E}(\xi)$,

$$c_1 = G^*(1+\lambda\beta)\frac{\beta_0^4}{(\beta_0-\beta)^2}, c_2 = \frac{(1-\lambda m)(\beta-1)(2-\rho)}{2(1-\rho)\beta}, G^* = \int \varphi^*(t)G(dt).$$

$X_1, ..., X_n$ échantillon issu d'une v.a X de fonction densité inconnue f et de distribution F.

L'estimateur à noyau [Rosenblatt 1956, Parzen 1962] est donné par :

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{j=1}^{n} K(\frac{x - X_j}{h_n}), \tag{6}$$

où K est appelé noyau et h_n paramètre de lissage.

Choix du paramètre de lissage

Étape critique en pratique. Problème largement étudié (synthèses [Jones-Marron-Sheather 1996, Loader 1998], monographie [Silverman 1986]).

Deux classes de méthodes :

1) Méthodes de première génération (méthodes classiques)

- Least squares cross-validation [Rudemo 1982, Bowman 1984].
- Validation croisée biaisée [Scott-Terrell 1987].
- ...

2) Méthodes de deuxième génération (méthodes plug-in)

- Rules of thumb [Silverman 1986].
- Méthode de Sheather et Jones [Sheather-Jones 1991].
- ...

Effets de bord

- Densité définie sur $\mathbb{R}$ [Rosenblatt 1956, Parzen 1962, Epanechnikov 1969, Bowman 1984, Loader 1998].
- Densité définie sur un support borné. Présence des effets de bord [Schuster 1985, Chen 2000, Scaillet 2001, Bouezmerni-Scaillet 2005].

1) Symétrisation ou "image miroir" [Schuster 1985]

- Créer l'image miroir des données de l'autre côté du bord.
- Appliquer l'estimateur à noyau pour l'ensemble des données et leur réflexion.

$$\tilde{f}_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{j=1}^{n}[K(\frac{x-X_j}{h_n}) + K(\frac{x+X_j}{h_n})]. \tag{7}$$

Autre idée : Usage de noyaux flexibles [Bouezmarni-Scaillet 2005].

2) Estimateur à noyau asymétrique

$$\hat{f}_b(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} K(x,b)(X_i), \tag{8}$$

où b est le paramètre de lissage et le noyau asymétrique K peut être :

$$K_G(\frac{x}{b}+1,b)(t) = \frac{t^{x/b}e^{-t/b}}{b^{x/b+1}\Gamma(x/b+1)}. \tag{9}$$

3) Histogramme lissé

$$\hat{f}_k(x) = k\sum_{i=0}^{+\infty} \omega_{i,k} p_{ki}(x), \tag{10}$$

où k est le paramètre de lissage, $\omega_{i,k} = F_n(\frac{i+1}{k}) - F_n(\frac{i}{k})$,
et $p_{ki}(.)$ peut être :

$$p_{ki}(x) = e^{-kx}\frac{(kx)^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, \ldots \tag{11}$$

Application

- Approximation d'un système réel $(G/G/1)$ par un système idéal $(M/G/1)$, par méthode de stabilité forte.
- Loi générale G des arrivées dans le système $G/G/1$ de densité inconnue $g(x)$.
- Méthodes d'estimation non paramétrique :
  - Méthode du noyau.
  - Techniques de correction des effets de bord.

Démarche générale à suivre

1) Usage d'une densité théorique $g(x)$ pour la loi générale G des inter-arrivées.

2) Usage des différents estimateurs non-paramétriques de $g(x)$.

3) Vérification, dans chaque cas, des conditions de stabilité forte.

4) Calcul de la distance de variation appropriée.

5) Calcul de l'erreur minimale appropriée sur les distributions stationnaires.

Moyens utilisés

- On prend :
  1. Taille de l'échantillon $n = 200.$
  2. Nombre de simulations $R = 100.$
- Programmation sous Matlab 7.1.
- Pour les estimateurs de Parzen-Rosenblatt et de Schuster, on choisit le noyau d'Epanechnikov [Epanechnikov 1969] donné par :

$$K(y) = \begin{cases} 0.75(1-y^2), & \text{si } |y| < 1; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{12}$$

Moyens utilisés

- **Choix des paramètres de lissage b et k :**

  Minimisation de la distance $\mathbb{L}_1$ [Bouezmarni-Scaillet 2005].

- **Choix du paramètre de lissage h_n :**

  Minimisation de "least squares cross-validation" [Bowman 1984].

$$LSCV(h_n) = \int f_n(x)^2 dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f_{h_n,-i}(X_i), \tag{13}$$

où,

$$f_{h_n,-i}(x_i) = \frac{1}{(n-1)h_n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} K\left(\frac{x_i - X_j}{h_n}\right).$$

Approximation du système $G/G/1$ par le système $M/G/1$

- Même loi de service de Cox2 dans les systèmes $G/G/1$ et $M/G/1$.
- Loi des inter-arrivées E_λ dans le système $M/G/1$.
- Loi des inter-arrivées générale G (Gamma) dans le système $G/G/1$, de fonction densité :

$$g(x) = \Gamma(0.7, 2)(x).$$

Paramètres de la loi Cox2 : $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 10$, $a = 0.005$.

Résultats

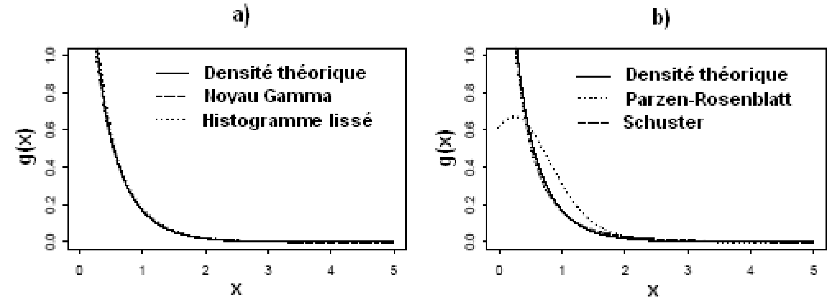

FIG. 2 : Densité théorique $g(x) = \Gamma(0.7, 2)(x)$, et densités estimées

Résultats

TAB. 2 : Mesures w_0, w^* et Er avec différents estimateurs

	$g(x)$	$g_n(x)$	$\tilde{g}_n(x)$	$\hat{g}_b(x)$	$\hat{g}_k(x)$
Distance de variation w_0	0.0096	0.1287	0.0114	0.0102	0.0105
Distance de variation w^*	0.0183	0.2536	0.0311	0.0206	0.0224
Er	0.0356		0.0452	0.0378	0.0377

Conclusion

1. Objectif principal :
   - Apporter les méthodologies permettant de résoudre certaines difficultés rencontrées lors de l'étude de la stabilité forte de SFA classiques.
   - Cela devient possible en combinant certains aspects statistiques au principe de la stabilité forte.

2. Intérêt des résultats :
   Intérêt des méthodes d'estimation non paramétrique et des techniques de correction des effets de bord lors de l'analyse approximative des SFA classiques par la méthode de stabilité forte pour :
   - Déterminer l'erreur d'approximation des distributions stationnaires entre deux SFA.
   - Substituer les caractéristiques d'un système réel complexe par un autre système idéal simple.

Perspectives

- Appliquer les techniques statistiques précédentes pour l'étude de stabilité forte d'autres classes de modèles stochastiques.

  ✓ Modèles de risque :

  - Exemple de modélisation des demandes des assurés.
  - Distribution de perte : la distribution de probabilité de paiement à l'assuré.
  - C'est une variable positive (souvent une distribution à queue lourde).
  - D'où la présence du problème du biais au bord.
  - Estimateur asymétrique à noyau Beta (sous ses différentes versions).
  - Distribution de Champernowne.

  ✓ Réseaux de files d'attente :

  - Modéliser des systèmes physiques complexes.
  - Une file d'attente simple n'est pas suffisante.
  - Faire appel à des réseaux de files d'attente.
  - Peu d'entre eux possèdent une solution analytique simple.
  - Difficulté d'étudier les propriétés des flux inter-stations.
  - Seuls résultats exacts connus sont ceux des réseaux en forme produit.

Perspectives

✠ Appliquer d'autres méthodes d'estimation pour l'étude de stabilité forte de modèles stochastiques.

✓ Bootstrap :

- Norme $\mathbb{L}_2$ plus utilisée au choix de la fenêtre ; Norme $\mathbb{L}_1$ a ses intérêts.
- Bootstrap peut s'adapter au critère : mean integrated square error MISE.
- Bootstrap peut s'appliquer pour déterminer la distance de variation w :

$$w = w(G, E_\lambda) = \int |G - E_\lambda|(dt) = \int |g_n - e_\lambda|(t)dt.$$

✓ Séries orthogonales :

- Bonne alternative à la méthode populaire du noyau.
- Quand le support de densité est contenu dans un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
- Systèmes orthonormaux convenables disponibles (base trigonométrique).

Perspectives

✠ Appliquer d'autres méthodes pour l'approximation stochastique de SFA :

- Méthode des séries exponentielles (développement en séries de Taylor).
- Approche pour la recherche et l'analyse de bornes dans la perturbation des chaînes de Markov.
- Recherche des bornes pour la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov homogène finie en utilisant les méthodes de l'analyse matricielle.

Références

- **Aicha Bareche**, Djamil Aïssani, *Statistical techniques for a numerical evaluation of the proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ queueing Systems*, Computers and Mathematics with Applications 61(5) 1296–1304, 2011.

- **Aicha Bareche**, Djamil Aïssani, *Kernel density in the study of the strong stability of the $M/M/1$ queueing system*, Operations Research Letters 36(5) 535–538, 2008.

Références

- **Aicha Bareche**, Djamil Aïssani, *Interest of kernel density in the use of strong stability method to precise the proximity of $G/M/1$ and $M/M/1$ systems*, Proceedings of the Second International Conference Valuetools'2007 (Performance Evaluation, Methodologies and Tools), 23-25 Octobre 2007, Nantes, France, ACM International Conference Proceedings Series. ICST (Institute for Computer Sciences Social Informatics and Telecommunications Engineering), ICST, Brussels, ISBN : ICST 978-963-9799-00-4, pp. 1–5.

- **Aicha Bareche**, Djamil Aïssani, *Nonparametric Estimation for a Numerical Evaluation of the Proximity of $G/G/1$ and $G/M/1$ Systems*, "24th European Conference on Operational Research (EURO XXIV)", 11-14 Juillet 2010, Lisbon, Portugal, Conference book pp. 237.

- **Aicha Bareche**, Djamil Aïssani, *Nonparametric Estimation for the Study of the Strong Stability of the $M/G/1$ Queueing System*, "9th Balkan Conference on Operational Research (BALCOR 2009)", 02-06 Septembre, Constanta, Roumanie, ISBN : 973-86979-9-9, Publisher : EUROGEMA EXIM, Printed in Bucharest - August 2009, Book of Abstracts pp. 6.

Merci pour votre attention